重さ1のHilbert modular形式とGalois群の表現(保型形式とその周辺)

太田, 雅己

数理解析研究所講究録
513巻 1984年 145-153

重さ1のHilbert modular形式とGalois群の表現

東海大 理 太田雅巳 (Masami Ohta)

§0. Introduction

Deligne と Serre [D-S] は重さ1の primitive な楕円 cusp 形式に付随するL-函数が或る2次のGalois群の表現のArtin L-函数になる事を示した。以下ではその結果の、(奇数次)総実代数体 F の Hilbert cusp 形式への拡張について述べる。

証明の方法は基本的には [D-S] と同様であるが、有理数体の代りに一般の総実体を扱うために生じる困難が2点ある:

(1). 重さ >1 の primitive な Hilbert cusp 形式に付随する Galois群の l-進表現の系の存在;

(2). Hilbert modular 形式の間の"合同".

本論では言葉の準備(§1)の後、主結果を述べ(§2)、証明の要点(1),(2)について説明する(§3).

尚筆者が本論の結果を得た後、同じ主題を扱った Rogawski と Tunnell の論文 [R-T] が出版された事を付記しておく。

§1. Hilbert modular 形式に関する準備.

以下 F を有限次総実代数体、$[F:\mathbb{Q}] = g$ とし、$\mathfrak{r}_F$ 又は $\mathfrak{r}$ で F の整数環、$\mathfrak{d}$ で $F/\mathbb{Q}$ の different を表わす。F の整 ideal $\mathfrak{n}$ に対し、

$$\begin{cases} S_1(\mathfrak{n}) = GL_2^+(F_\infty) \times \prod_{\mathfrak{p}} S_{1,\mathfrak{p}} < GL_2(F_A) \\ S_{1,\mathfrak{p}} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL_2(F_\mathfrak{p}) \;\middle|\; \begin{matrix} a \in \mathfrak{r}_\mathfrak{p},\ b \in \mathfrak{d}_\mathfrak{p}^{-1},\ c \in \mathfrak{d}_\mathfrak{p}\mathfrak{n}_\mathfrak{p} \\ d-1 \in \mathfrak{n}_\mathfrak{p},\ ad-bc \in \mathfrak{r}_\mathfrak{p}^\times \end{matrix} \right\} \end{cases}$$

とおく。ここで添字 A (resp. $\mathfrak{p}$) は adele 化 (resp. $\mathfrak{p}$-進完備化) を示し、$GL_2^+(F_\infty)$ は $GL_2(F_A)$ の無限成分の1の連結成分とした。技術的な理由から次の群も考える:

$$\begin{cases} S_2(\mathfrak{n}) = GL_2^+(F_\infty) \times \prod_{\mathfrak{p}} S_{2,\mathfrak{p}} < GL_2(F_A) \\ S_{2,\mathfrak{p}} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in S_{1,\mathfrak{p}} \;\middle|\; a-1 \in \mathfrak{n}_\mathfrak{p} \right\} \end{cases}$$

$S_\varepsilon(\mathfrak{n})$ $(\varepsilon = 1 \text{ or } 2)$ の一方を固定し、暫くそれを S と書く。

$$F_A^\times = \coprod_{i=1}^{h} \det(S)\, F^\times t_i$$

と分解し、以下 $t_i \in F_A^\times$ の無限成分は全て1にとっておく。$x_i = \begin{bmatrix} t_i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in GL_2(F_A)$ とおけば

$$GL_2(F_A) = \coprod_{i=1}^{h} S\, x_i\, GL_2(F)$$

となる。各 i に対して

$$S_i = x_i^{-1} S x_i, \quad \Gamma_{S_i} = S_i \cap GL_2(F)$$

とおく。Γ_{S_i} は複素上半平面 H の g 個の直積 H^g の上に自然に作用する。

<u>定義.</u> 正の整数 k に対して

$$\mathfrak{M}_k(S) = \bigoplus_{i=1}^{h} \mathfrak{M}_k(\Gamma_{S_i})$$

$$\mathfrak{S}_k(S) = \bigoplus_{i=1}^{h} \mathfrak{S}_k(\Gamma_{S_i})$$

とする。ここで右辺の $\mathfrak{M}_k(\Gamma)$ (resp. $\mathfrak{S}_k(\Gamma)$) は通常の、Γ に関する重さ k の Hilbert modular 形式 (resp. cusp 形式) を表わす。

$\mathfrak{t}_i$ を t_i に対応する F の ideal とすると、良く知られているように、$f_i(z) \in \mathfrak{M}_k(\Gamma_{S_i})$ は次の形の Fourier 展開をもつ:

$$f_i(z) = \sum_{\xi} a_i(\xi)\, e^{2\pi i\, tr(\xi z)} \qquad (z \in H^g)$$

ここで和は $\xi \in \mathfrak{t}_i$ かつ $\xi \gg 0$ (総正) 又は $\xi = 0$ を走る。

通常のように $\mathfrak{M}_k(S)$, $\mathfrak{S}_k(S)$ には Hecke 作用素 $T(\mathfrak{p})$ ($\mathfrak{p}$ は F の有限素点)、$T(\mathfrak{p},\mathfrak{p})$ ($\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{n}$ と素な F の有限素点) が作用する。又 $\mathfrak{S}_k(S_1(\mathfrak{n}))$ の new form という概念が自然に定義される。特に $f \in \mathfrak{S}_k(S_1(\mathfrak{n}))$ が new form ならそれは Hecke 作用素の同時固有函数である:

$$\begin{cases} T(\mathfrak{p})\, f = a_f(\mathfrak{p})\, f & (\forall \mathfrak{p}) \\ T(\mathfrak{p},\mathfrak{p})\, f = a_f(\mathfrak{p},\mathfrak{p})\, f & (\forall \mathfrak{p} \nmid \mathfrak{n}) \end{cases}$$

この時

$$D(s,f) = \prod_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{n}} \left(1 - a_f(\mathfrak{p})\, N(\mathfrak{p})^{-s} + a_f(\mathfrak{p},\mathfrak{p})\, N(\mathfrak{p})^{1-2s}\right)^{-1}$$

$$\times \prod_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{n}} \left(1 - a_f(\mathfrak{p})\, N(\mathfrak{p})^{-s}\right)^{-1}$$

とおく。

§2. 主結果

§1の記号を踏襲する。

__定理1.__ $g = [F : \mathbf{Q}]$ が奇数とする。$f \in \mathfrak{S}_1(\mathfrak{K}_1(\mathfrak{n}))$ が重さ1の new form の時、連続な表現

$$\rho : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \longrightarrow GL_2(\mathbf{C})$$

があって次をみたす：

i). ρ は $\mathfrak{n}$ 以外の F の有限素点で不分岐；

ii). $\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{n}$ と素な F の有限素点、$\sigma_{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ を $\mathfrak{p}$ での一つの Frobenius 元とする時

$$\det(1 - \rho(\sigma_{\mathfrak{p}}^{-1})\, T) = 1 - a_f(\mathfrak{p})\, T + N(\mathfrak{p})\, a_f(\mathfrak{p},\mathfrak{p})\, T^2 .$$

この定理の証明の要点は次節に述べる。これから次の系が導かれる：

__系1.__ 同じ記号の下で

$$\left\{\begin{array}{lll} D(s,f) & = & \rho \text{ の Artin L-関数} \\ N & = & \rho \text{ の Artin conductor} \end{array}\right.$$

保型表現の言葉で、これはもう少し強い次の形で言える：

<u>系2.</u> π_f を f に付随する unitarizable な $GL(2)$ の保型表現とすると $\pi_f = \pi(\rho)$ （右辺の意味は例えば、Langlands [L] p.23 参照）。

系1，2の応用として次の事が言える：

<u>系3.</u> F の任意の有限素点 $\mathfrak{p}$ について

$$|a_f(\mathfrak{p})| \leq 2$$

即ち（g：奇数の時）$\mathfrak{S}_1$（$S_1(N)$）について Ramanujan-Petersson 予想が成立する。

<u>系4.</u> 上と同じ F に対し、

$$\varphi : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \longrightarrow GL_2(\mathbb{C})$$

を連続な表現、$\bar{\varphi}$ を φ と $GL_2(\mathbb{C}) \twoheadrightarrow PGL_2(\mathbb{C})$ の合成とし、次を仮定する：

i) $\mathrm{Im}(\bar{\varphi}) \cong \mathfrak{S}_4$ （4次対称群）；

ii) I の同型で $\mathfrak{A}_4$ に対応する F の2次拡大は総実；

iii) F の任意の無限素点 v に対し、"v の Frobenius" の φ による像は $\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ と共役。

この時 φ について Artin 予想が成立する。

§3. 証明の要点.

§0で述べた2点のうち (1) については次が成立する

定理2.([O1]) Fを$\mathbb{Q}$上奇数次の総実代数体、$f \in \mathfrak{S}_k(S_1(\mathfrak{n}))$ $(k \geq 2)$ を new form とする. この時全ての $a_f(\mathfrak{p})$, $a_f(\mathfrak{p},\mathfrak{p})$ を含む或る有限次代数体 K があり、K の任意の有限素点 λ に対して次が成り立つ:

$$\exists \rho_\lambda : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \longrightarrow GL_2(K_\lambda) \quad (\text{連続準同型}) \ \text{s.t.}$$

i). ρ_λ は $\mathfrak{n}N(\lambda)$ 以外で不分岐;

ii). $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{n}N(\lambda)$ の時

$$\det(1 - \rho_\lambda(\sigma_\mathfrak{p}^{-1})T)$$
$$= 1 - a_f(\mathfrak{p})T + N(\mathfrak{p})a_f(\mathfrak{p},\mathfrak{p})T^2$$

この定理は、はじめに(一般の)F上の四元数体から得られる一変数保型形式に付随する λ-進表現を構成し、それに Eichler−清水−Jacquet−Langlands の対応を用いる事によって得られる。$[F:\mathbb{Q}]$ が奇数という条件が要るのはそのためである。これより後の議論では F は任意の総実代数体で良い。

(2) について説明するために言葉の準備をする。一般に R を有限次代数体の素 ideal λ での付値環とする. 以下、§1で選んだ代表元 t_i $(1 \leq i \leq h)$ は $N(t_i) \in R^\times$ になるようにとっておく。

$$\mathfrak{M}_k(\Gamma_{S_i})(R) = \{ f_i(z) = \sum_{\xi} a_i(\xi)\, e^{2\pi i\, tr(\xi z)} \in \mathfrak{M}_k(\Gamma_{S_i}) \mid$$

$a_i(\xi) \in R$ for all $\xi \in t_i$ s.t. $\xi \gg 0$ or $\xi = 0 \}$

$$\mathfrak{M}_k(S)(R) = \bigoplus_{i=1}^{h} \mathfrak{M}_k(\Gamma_{S_i})(R)$$

とおく。 $f = (f_i) \in \mathfrak{M}_k(S)(R)$, $g \in (g_i) \in \mathfrak{M}_{k'}(S)(R)$ に対し、"$f_i \equiv g_i \pmod{\ell}$", "$f \equiv g \pmod{\ell}$" で、各々の Fourier 係数が全て mod ℓ で合同である事を示す。

<u>命題.</u> $\mathfrak{M}_k(S)(R)$, $\mathfrak{G}_k(S)(R)$ は $T(\mathfrak{p})$, $T(\mathfrak{p},\mathfrak{p})$ $({}^{\forall}\mathfrak{p} \nmid N(\ell))$ で stable.

<u>定理3.</u> $N_0 \in \mathbb{Z}, \geq 4$ を固定する時、${}^{\exists} m \in \mathbb{Z}, \geq 0$ と $N_0 m$ に依存する素数の有限集合 $P(N_0 m)$ があって、任意の素数 $\ell \notin P(N_0 m)$ に対して次が成立する:

$${}^{\exists} h = (h_i) \in \mathfrak{M}_k(S_2(N_0 m))(\mathbb{Z}_\ell \cap \mathbb{Q})$$

with ${}^{\exists} k \equiv 0 \pmod{(\ell-1)}$ s.t.

i) $h \equiv 1 \pmod{\ell}$;

ii) $\mathfrak{p}$ を $N_0 m N(\ell)$ と素な F の有限素点、$\varpi \in F_{\mathfrak{p}}$ を素元とする時 $GL_2(F_A) \ni (1, \cdots, 1, \begin{bmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & \varpi^{-1} \end{bmatrix}, 1, \cdots, 1)$ ($\mathfrak{p}$-成分のみ $\begin{bmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & \varpi^{-1} \end{bmatrix}$ 他は 1) を $s_i d_i$ ($s_i \in S_i$, $d_i \in GL_2(F)$) と書く。すると $h_i | d_i \equiv 1 \pmod{\ell}$ $(1 \leq i \leq h)$.

更に m は与えられた整数と素にとれる。

<u>注意.</u> $F = \mathbb{Q}$ の時には h として適当な Eisenstein 級数をとれば良い (cf. [D.-S] 6.9)。F が $\mathbb{Q}$ 上 abelian な

らばやはり適当な Eisenstein 級数で間に合うが、一般には未解決の予想を仮定しないと Eisenstein 級数が i), ii) をみたす事が証明できない。上のものは Rapoport, Katz, Deligne-Ribet による Hilbert modular 形式の代数的理論を使って（Eisenstein 級数とは別に）構成する。

定理1の証明は定理2、定理3、及び志村氏の結果（[S] Prop. 4.13；これから [D-S] Prop. 5.1 の一般化が容易に従う）を用いれば、[D-S] と同様に行く。

文献

[D-S] P. Deligne, J.-P. Serre, Formes modulaires de poids 1, Ann. sci. éc. norm. sup. 4^e série, t.7, 507-530 (1974).

[L] R. P. Langlands, Base change for GL(2), Ann. Math. Studies 96, Princeton Univ. Press (1980).

[O1] M. Ohta, On l-adic representations attached to automorphic forms, Japanese J. Math. 8, 1-47 (1982); part II, to appear.

[O2] 〃, Hilbert modular forms of weight one and Galois representations, to appear.

[R-T] J. D. Rogawski, J. B. Tunnell, On Artin

L-functions associated to Hilbert modular forms of weight one, Invent. Math. 74, 1-42 (1983).

[S] G. Shimura, The special values of the zeta functions associated with Hilbert modular forms, Duke Math. J. 45, 637-679 (1978).